Practica 4

Derivadas parciales.

Problema 1

En los siguientes casos Halle las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

a) $f(x,y) = (x^2-1)(y+2)$

b) $f(x,y) = \dfrac{(x+y)}{(xy-1)}$

c) $f(x,y) = \ln(x+y)$

d) $f(x,y) = \operatorname{sen}^2(x-3y)$

e) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \displaystyle\int_x^y g(t)\,dt$

Ejercicio 1

a)

$$f(x,y) = (x^2-1)(y+2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y+2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$$

b)

$$f(x,y) = \frac{(x+y)}{(xy-1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y^2-1}{(xy-1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2-1}{(xy-1)^2}$$

c) $f(x,y) = \ln(x+y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(x+y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{(x+y)}$$

d) $f(x,y) = \operatorname{sen}^2(x-3y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\operatorname{sen}(x-3y)\cos(x-3y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6\operatorname{sen}(x-3y)\cos(x-3y)$$

Problema 2.

Utilizar la definición de derivada parcial y calcular las derivadas en los puntos especificados:

a) $f(x, y) = 1 - x + y - 3x^2 y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{en} \ (1, 2)\,.$$

b) $f(x, y) = 4 + 2x - 3y - xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{en} \ (-2, 1)\,.$$

a) $f(x,y) = 1 - x + y - 3x^2y$

i) $$\frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,2) - f(1,2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[1-(1+h)+2-6(1+h)^2] - (2-6)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h - 6(1+2h+h^2+6)}{h} = -13$$

ii)

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,2+h) - f(1,2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[1 - 1 + (2+h) - 3(2+h)] - (2-6)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2 - 6 - 2h) - (2-6)}{h} = -2$$

b) $f(x, y) = 4 + 2x - 3y - xy^2$

$$\frac{\partial f(-2,1)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2, 1+h) - f(-2,1)}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f(-2,1)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h, 1) - f(-2,1)}{h} = 1$$

Ejercicio 2.

Sea f(x,y,z) una función de tres variables. Escriba la definición formal de derivada $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$ utilice esta definición para calcular dicha derivada para la función

$$f(x,y,z) = x^2yz^2, \text{ en el punto } (1,2,3)$$

Ejercicio 3.

Demuestre que las siguientes funciones son solución de la ecuación de ondas en una dimensión:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

a) $\phi = \sin(x + ct)$

b) $\phi = \ln(2x + 2ct)$

c) $\phi = 5\cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$

Problema 3.

Sea la función:

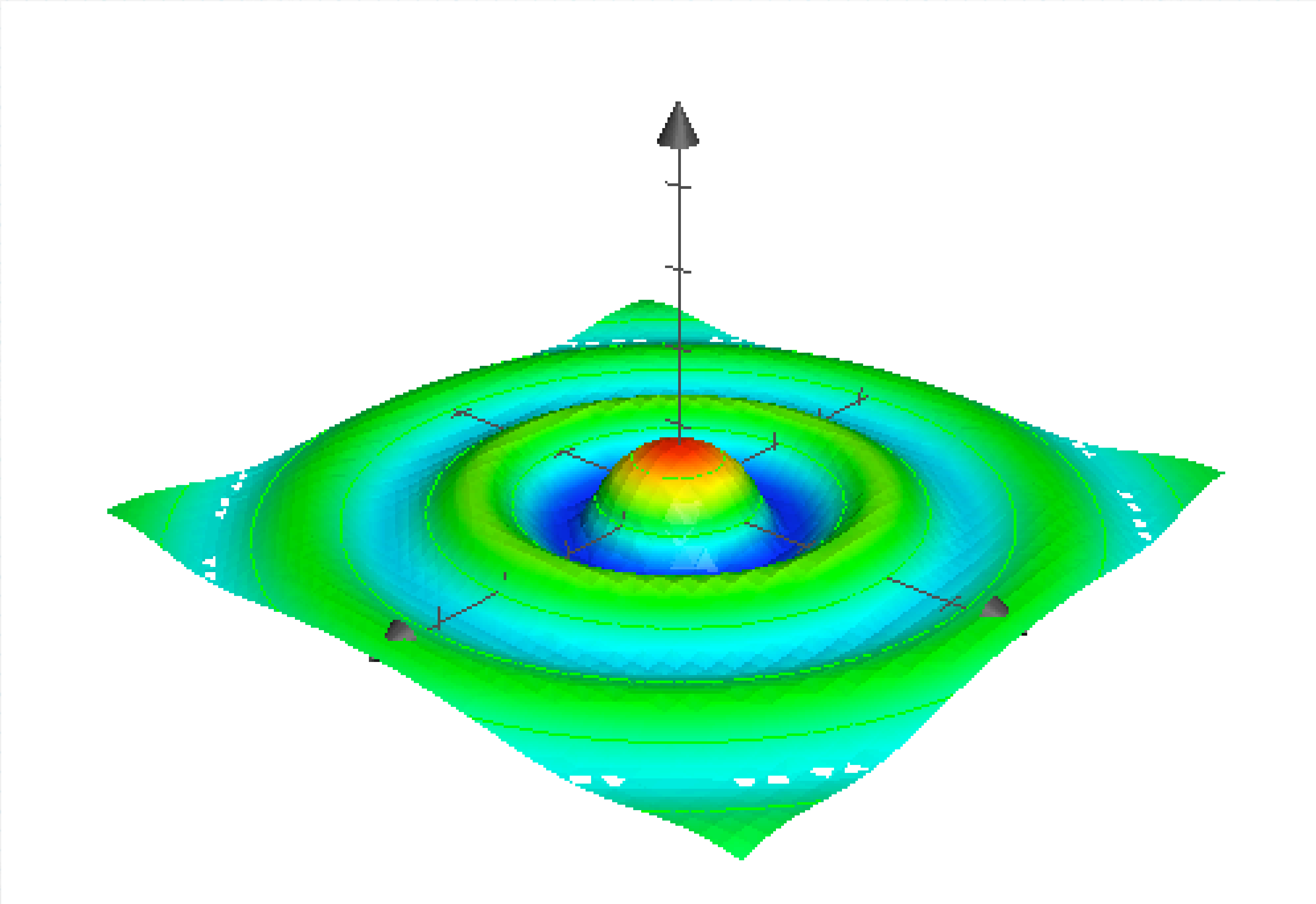
$$f(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(6r)}{6r}, & \text{si} \quad r \neq 0, \\ 1, & \text{si} \quad r = 0. \end{cases}$$

Donde r y θ son coordenadas polares. Calcule:

a) $\lim\limits_{r \to 0} f(r,\theta)$

b) $\dfrac{\partial f(r,\theta)}{\partial r}$, en $(0,0)$

c) $\dfrac{\partial f(r,\theta)}{\partial \theta}$, $r \neq 0$



a) $\lim\limits_{r \to 0} f(r, \theta)$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\sin 6r}{6r} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

$$\boxed{t = 6r}$$

b) $\dfrac{\partial f(r,\theta)}{\partial r}$, en $(0,0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{\mathrm{sen}(6h)}{6h}\right)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-36\mathrm{sen}(6h)}{12} = 0$$

Completar, recuerde que es un limite en una dimensión

c) $$\frac{\partial f(r,\theta)}{\partial \theta}, \ r \neq 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(r,\theta+h) - f(r,\theta)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{\operatorname{sen}(6r)}{6r}\right) - \left(\frac{\operatorname{sen}(6r)}{6r}\right)}{h} = 0$$